Correction d'exercice de géométrie dans l'espace

Sujet C page 83

a) $\overrightarrow{AB}(2\,;-2\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;-2\,;-2)$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles)

donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

FAUX.

b) $\overrightarrow{AB}(2\,;-2\,;-2)$ et $\overrightarrow{CD}(3\,;1\,;-2)$ ne sont pas colinéaires

donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Elle sont donc sécantes ou non coplanaires.

comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, le point D est dans le plan (ABC) ssi il existe deux réels α et β tels que :

$\overrightarrow{AD} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$

cette égalité est équivalente à $\begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta & (1) \\ -1 = -2\alpha - 2\beta & (2) \\ -4 = -2\alpha - 2\beta & (3) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 0 = -4\beta & ((1)+(2)) \\ \alpha = \frac{1}{2} & ((1) \text{ avec } \beta = 0) \\ \alpha = 2 & ((3) \text{ avec } \beta = 0) \end{cases}$

donc A, B, C, D sont non coplanaires

donc (AB) et (CD) aussi.

FAUX.

c) $(EF) \,//\, (ABC) \iff \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ coplanaires

$\iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{EF} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$

$\iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \begin{cases} 0 = 2\alpha - 2\beta & (1) \\ -4 = -2\alpha - 2\beta & (2) \\ -6 = -2\alpha - 2\beta & (3) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -4\beta = -4 & (1)+(2) \\ -4\beta = -6 & (1)+(3) \end{cases}$ donc FAUX

Sujet D p 83

1) $\overrightarrow{AB}(2;0;0) = 2\vec{i}$ donc (AB) est parallèle à l'axe des abscisses

2) $(CD) \parallel \mathcal{P} \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{CD} = \alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$ car $(\vec{j}, \vec{k})$ est une direction de $\mathcal{P}$

$$\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \begin{cases} 0 = 0 \\ 4 = \alpha \\ 3 = \beta \end{cases}$$

donc $(CD) \parallel \mathcal{P}$

donc $(CD) \cap \mathcal{P}$ est soit vide (strict parallélisme), soit réduite à un point (droite contenue dans le plan)

Or $C \in (CD)$ et $C \in \mathcal{P}$ donc $C \in (CD) \cap \mathcal{P}$

donc $(CD) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ donc ~~(CD) // P~~ $(CD) \subset \mathcal{P}$.

3) $(AB) \parallel \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AB}, \vec{j}, \vec{k}$ coplanaires car $(\vec{j}, \vec{k})$ est une direct° de $\mathcal{P}$

$\iff \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ coplanaires car $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$

donc $(AB) \not\parallel \mathcal{P}$ donc (AB) et $\mathcal{P}$ sont sécants

4a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{CE} = a\vec{j} + b\vec{k} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = a \\ 4 = b \end{cases}$ donc $\overrightarrow{CE} = -\vec{j} + 4\vec{k}$

4b) $\overrightarrow{AE}(11;0;0) = \frac{11}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $E \in (AB)$

$\overrightarrow{CE} = -\vec{j} + 4\vec{k}$ donc E est dans le plan passant par E et de direction $(\vec{j}, \vec{k})$

donc $E \in \mathcal{P}$

donc $E \in (AB) \cap \mathcal{P}$.

Or $(AB) \cap \mathcal{P}$ est un point

donc $E = (AB) \cap \mathcal{P}$.

5) $\overrightarrow{CE}(0\,;-1\,;4)$ et $\overrightarrow{CD}(0\,;4\,;3)$ sont non colinéaires

donc $E \notin (CD)$ (E, C, D non alignés)

Si (AB) et (CD) étaient sécantes, leur point d'intersection

serait dans (AB) et dans $\mathcal{P}$ (car $(CD) \subset \mathcal{P}$).

Or $(AB) \cap \mathcal{P} = E$ et $E \notin (CD)$, donc (AB) et (CD) non sécantes

sujet E page 83

1) A, B, D, E sont non coplanaires (sinon le cube ne serait plus cube)

donc $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$ est une base vectorielle de l'espace.

2a) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

donc $\overrightarrow{CE}(-1\,;-1\,;1)$ dans la base $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$

2b) $\overrightarrow{CL}\left(-\frac{2}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ car $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CL}$

$$\overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}$$

3) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$

(Si on ne le voit pas, on résout $\overrightarrow{AL} = \alpha\overrightarrow{AF} + \beta\overrightarrow{AH}$)

Donc $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont coplanaires

4) $F(1\,;0\,;1)$ et $H(0\,;1\,;1)$ donc le milieu K de $[FH]$

a pour coordonnées $(1/2\,;1/2\,;1)$ donc $\overrightarrow{AK}(1/2\,;1/2\,;1)$

donc $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AL}$ donc A, K, L sont alignés

Sujet F p 83

1a) à $t=0$, $S_1(0) = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix}$

1b) $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OS_1}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}$

En particulier, le vecteur vitesse est constant càd que le mouvement est rectiligne uniforme.

~~1c) $\overrightarrow{OS_1}(0) = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix}$~~

1c) Soit t l'instant où le sous-marin est à la surface (t en min)

On a donc $S_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ pour deux réels inconnus α et β.

Donc $\overrightarrow{S_1(0)S_1(t)} = \begin{pmatrix} \alpha - 140 \\ \beta - 105 \\ 0 - (-170) \end{pmatrix}$ d'une part

et $\overrightarrow{S_1(0)S_1(t)} = t\,\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -60t \\ -90t \\ -30t \end{pmatrix}$ d'autre part

Donc la cote donne $t = -\dfrac{170}{30} = -\dfrac{17}{3}$ min $= -\dfrac{17}{3} \times 60\,s = -17 \times 20\,s$

$t = -340\,s = -5$ min $40\,s$

(t est un instant, pas une durée donc négatif ok)

2) $\overrightarrow{S_2(0)S_2(t)} = t\,\overrightarrow{v_2}$ car le mouvement est rectiligne uniforme

or $\overrightarrow{S_2(0)S_2(3)} = 3\,\overrightarrow{v_2}$ donc $\overrightarrow{v_2} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -270 \\ -540 \\ -180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{S_2(0)S_2(t)} = \begin{pmatrix} -90t \\ -180t \\ -60t \end{pmatrix}$

or $\overrightarrow{S_2(0)S_2(t)} = \overrightarrow{S_2(0)O} + \overrightarrow{OS_2(t)}$

donc $\overrightarrow{OS_2(t)} = \overrightarrow{OS_2(0)} + \overrightarrow{S_2(0)S_2(t)}$

$\overrightarrow{OS_2(t)} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -90t \\ -180t \\ -60t \end{pmatrix}$

donc $S_2(t) = \begin{pmatrix} 68-90t \\ 135-180t \\ -68-60t \end{pmatrix}$

3a) Les deux sous-marins sont à la même profondeur lorsque leurs cotes sont égales càd :

$-170-30t = -68-60t \iff 30t = 102$

$\iff t = \frac{34}{10}$ min $= 34 \times 60 = 204$ s $= 3$ min 24 s

3b) $\vec{V_1}\begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}$ ~~donc~~ sont non colinéaires donc

on peut déjà affirmer que les trajectoires des 2 sous-marins sont non parallèles. Les trajectoires ont 1 pt commun (ce qui ne veut pas dire qu'ils se crashent car l'instant n'est pas nécessairement le même)

ssi il existe ~~un~~ deux réels t, t' tels que :

$\begin{cases} 140-60t = 68-90t' \\ 105-90t = 135-180t' \\ -170-30t = -68-60t' \end{cases} \iff \begin{cases} 90t'-60t = -72 & (1) \\ 180t'-90t = 30 & (2) \\ 60t'-30t = 102 & (3) \end{cases}$

or (2) et (3) sont incompatibles car (2) $- 3\times$(3) donne $0 = -276$

Donc les trajectoires sont non coplanaires